Tronc Commun

Série 1 : Calcul vectoriel

Exercice 1 :

$ABCD$ est un parallélogramme

M et N et P trois points tels que : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

1. Montrer que : $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$
2. Montrer que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AP}$
3. Montrer que $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}$

Exercice 2 :

Soient A ; B ; C et M quatre points du plan.

Soit $\vec{U}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

1. Montrer que : $\vec{U}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

2. Soit $\vec{V}=2\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{BC}$

Montrer que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires .

Exercice 3 :

ABC est un triangle , les points D et E sont tels que :

$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{BA}$

Montrer que le point C est le milieu du segment $[DE]$

Exercice 4 :

$ABCD$ est un parallélogramme

Soient E et F deux points tels que :

$\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Montrer que :

$\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Et $\overrightarrow{CF}=3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.

2. En déduire que les points E ; C et F sont alignés

Corrigé de l'exercice 1 :

1.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

2. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

Et d'après le résultat de la question 1. : $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

Et par suite $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

3. On a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\end{aligned}$$

Et puisque $ABCD$ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

D'où $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AN}$ (car $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$)

Corrigé de l'exercice 2 :

1.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{U} &= \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\\ &= \overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}\\ &= 2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= 2\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{BC}\\ &= 2\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{AC}\\ &= -4\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{AC}\\ &= 4\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC}\\ &= 2\left(2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)\\ &= 2\vec{U}\end{aligned}$$

Donc $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.

Corrigé de l'exercice 3 :

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{BA}\\ &= -\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

Donc le point C est le milieu du segment $[DE]$

Corrigé de l'exercice 4 :

1. On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}\\ &= \overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= -\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Et , on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}\\ &= \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+4\overrightarrow{AD}\\ &= -\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{AD}\\ &= 3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

2.

Puisque $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ Et $\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

Alors $\overrightarrow{CF} = -3\overrightarrow{CE}$

Donc $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires

Et par suite les points E ; C et F sont alignés

つづく